THE ROAD TO GENERAL RELATIVITY ILLUSTRATED

DOCUMENTS FROM THE ALBERT EINSTEIN ARCHIVES THE HEBREW UNIVERSITY OF JERUSALEM

Harnack House, November 30 – December 5, 2015

Einstein Archives Online

Albert Einstein.™

Landmarks in the development of relativity

1905 The Special Theory of Relativity

1907 Idea of a generalized relativity principle; Principle of equivalence

1912 The entry of geometry; Metric tensor represents gravitational field; The "Zurich notebook"

1913 The "Entwurf" Theory; The "Einstein-Besso manuscript"

1915 The drama of November

1916 The final paper on GR

1904-1909
Patent office in Bern

1909-1910
Assoc. Prof. in U. of Zurich

1911- 1912
Prof. at German U. in Prague

1912-1914
Prof. at ETH in Zurich

1914-1933
Berlin

1933-1955
IAS in Princeton

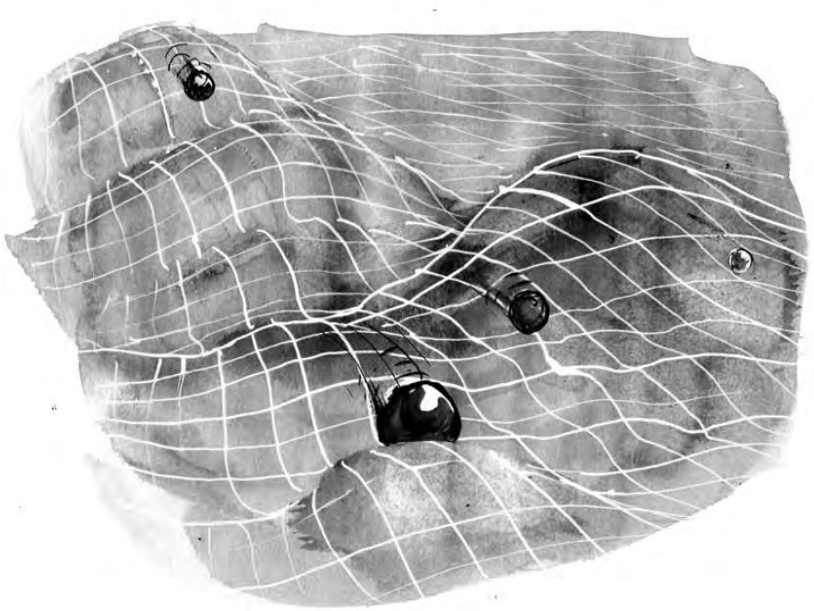
Mental Model – Newton's limit

$$\Delta\Phi = 4\pi\kappa\rho \quad \text{(Classical Poisson equ.)}$$

G. R. → $\Phi \rightarrow g_{\mu\nu}$ $\rho \rightarrow T_{\mu\nu}$

$$Op\,(g_{\mu\nu}) = \kappa\, T_{\mu\nu}$$

GR describes gravity in purely geometrical terms



Matter tells space-time how to curve;
Curved space-time tells matter how to move.
John Archibald Wheeler

a field equation, describing the gravitational field generated by matter and energy; this field is represented by the geometry of space-time

an equation of motion, describing the motion of particles in a given gravitational field

The Goals of a Theory General Relativity

To describe the geometrical structure of space-time under the influence of a given mass distribution (Gravitational Field Equation)

To describe the motion of bodies and light rays in the resultant curved space-time (Equation of Motion)

SUCH THAT:

The equations will be independent of the frame of reference (General Covariance)

Consistent with energy-momentum conservation

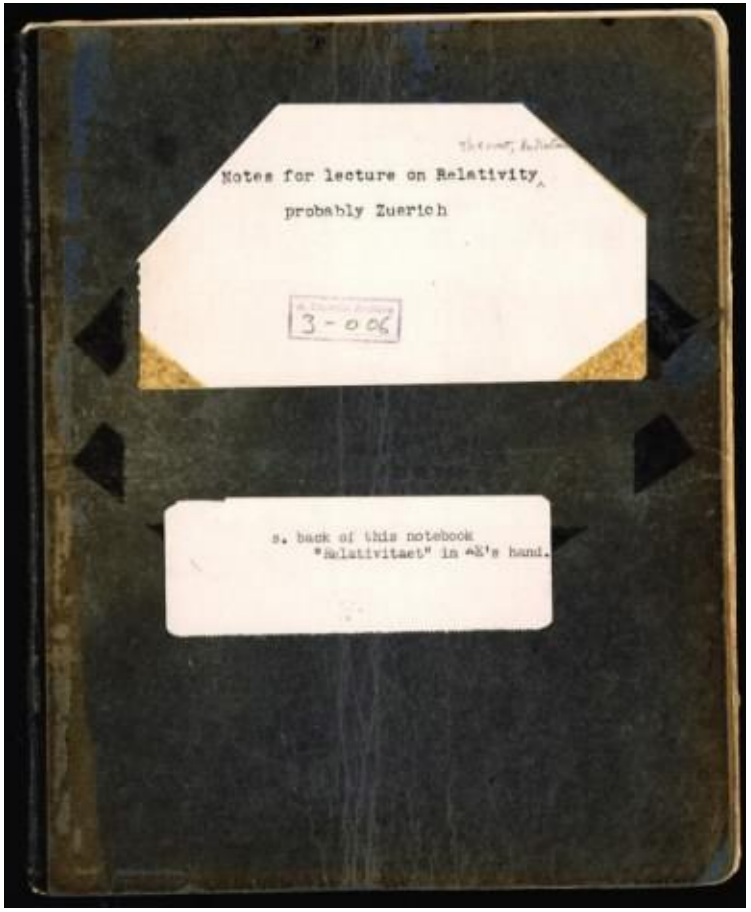
For weak, static gravitational fields theory has to reduce to Newton's theory

Mathematical vs. Physical strategy for constructing the field equations

Physical Strategy – start with an object that fulfills the physical requirements and then check the covariance properties

Mathematical Strategy – find an expression of general covariance to meet the expected principles of relativity and equivalence
Check if the physical requirements (energy-momentum conservation, Newtonian limit) are fulfilled

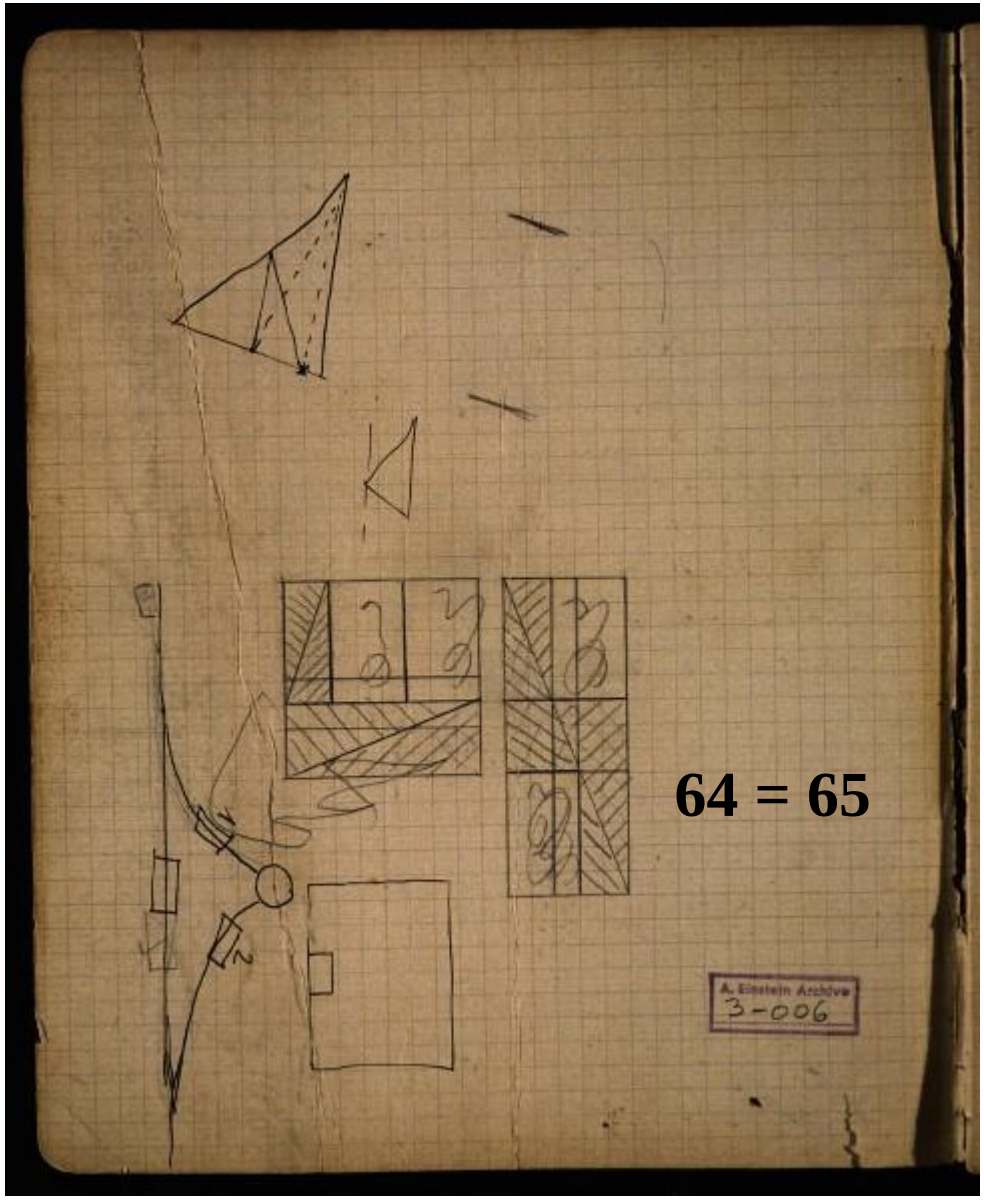
“Grossman you have got to help me or will go crazy”



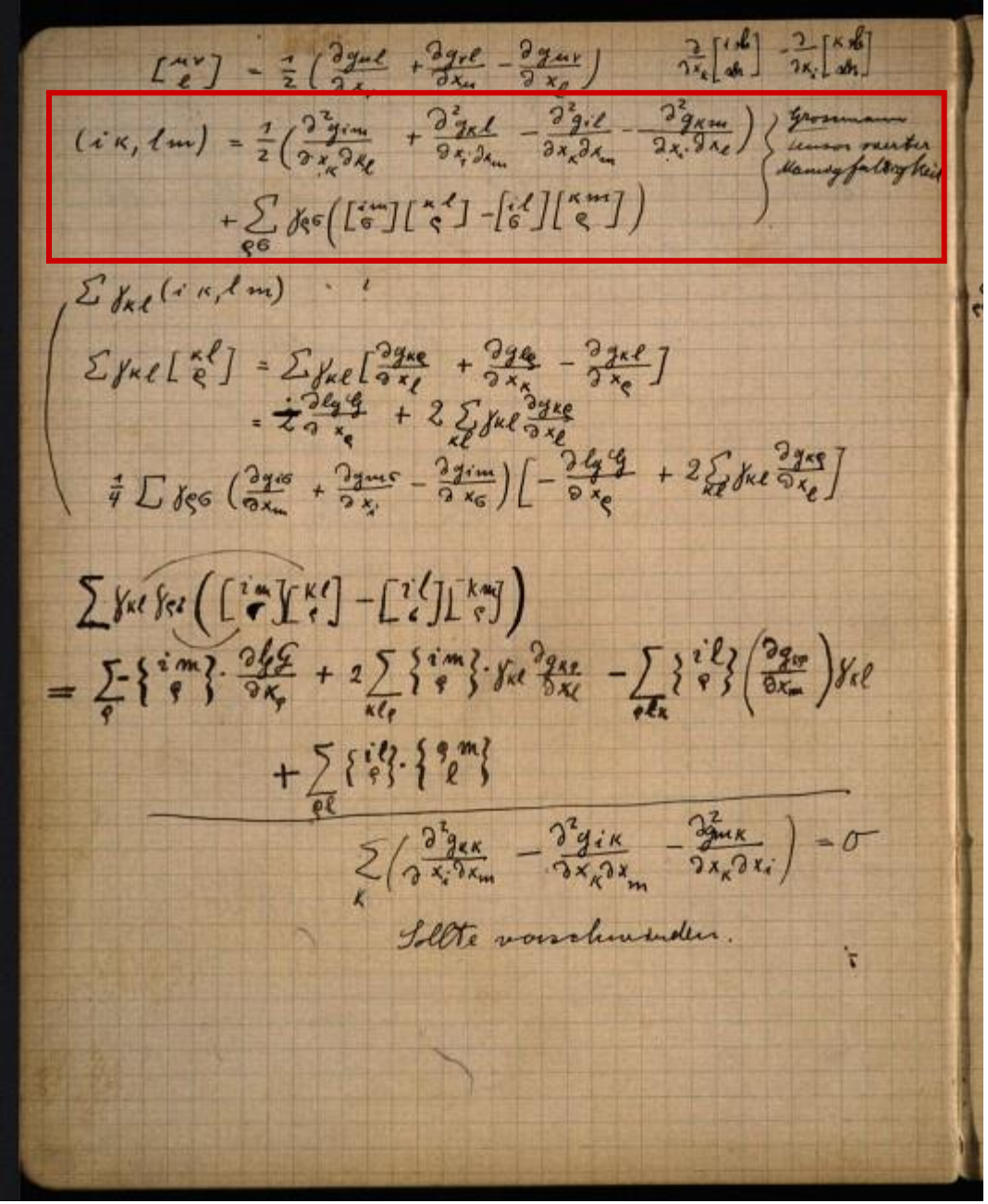
Einstein’s Zurich Notebook

“I am now working exclusively on the gravitation problem and believe that I can overcome all difficulties with the help of a mathematician friend of mine here. But one thing is certain: never before in my life have I toiled any where near as much, and I have gained enormous respect for mathematics, whose more subtle parts I considered until now, in my ignorance, as pure luxury. Compared with this problem, the original theory of relativity is child's play.”

Einstein to Sommerfeld, 1912

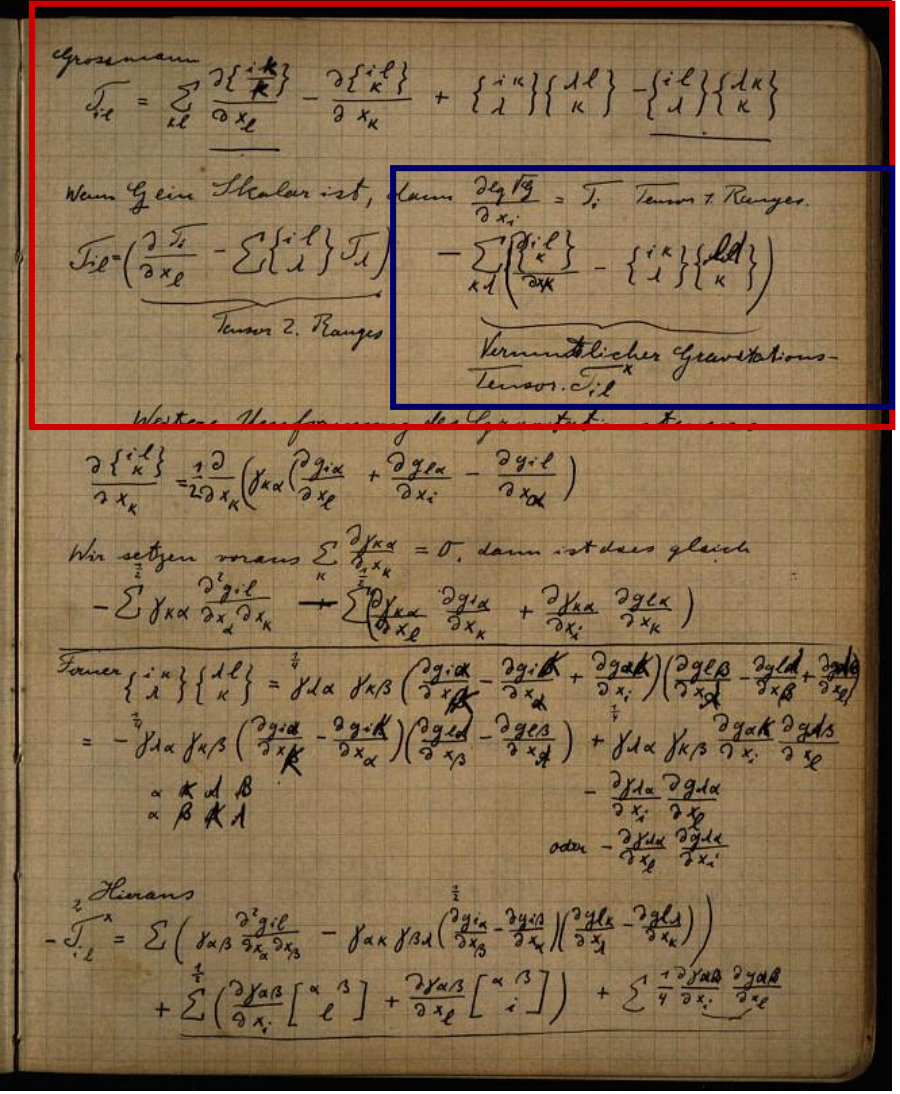


Mathematical puzzles



The Riemann tensor appears in the Zurich Notebook in the search for covariant mathematical expressions constructed from derivatives of the metric tensor. There it is denoted by the four index symbol *(ik,lm)*. It is marked by a label: “Grossmann tensor fourth rank,” indicating the role of Grossman in bringing it to Einstein’s attention.

p. 14L

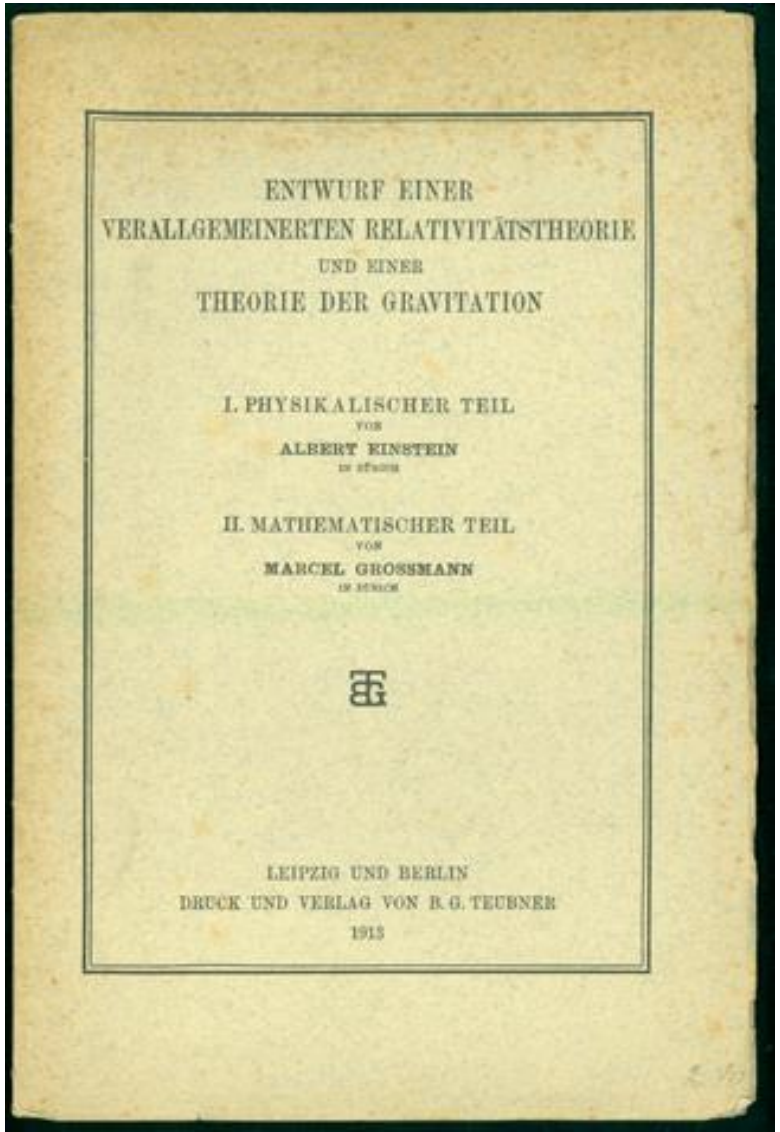


The Ricci tensor appears in the Zurich Notebook as a candidate for the gravitational tensor to appear in the gravitational field equations. Again, the name Grossman appears at the head of Einstein labels the second term of this tensor as the "presumed gravitational tensor *T*."

p. 22R

The "Entwurf" Theory

"Outline (Entwurf) of a General Theory of Relativity and of a Theory of Gravitation", Einstein, Grossman 1913


ENTWURF EINER
VERALLGEMEINERTEN RELATIVITÄTSTHEORIE
UND EINER
THEORIE DER GRAVITATION

I. PHYSIKALISCHER TEIL
VON
ALBERT EINSTEIN

II. MATHEMATISCHER TEIL
VON
MARCEL GROSSMANN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

Framework of general theory of relativity.
Gravity as curvature of space-time geometry.

"I finally solved the problem a few weeks ago. It is a bold extension of the theory of relativity together with the theory of gravitation. Now I must give myself some rest, otherwise I will go kaput", Albert to Elsa

The equations are not generally covariant!

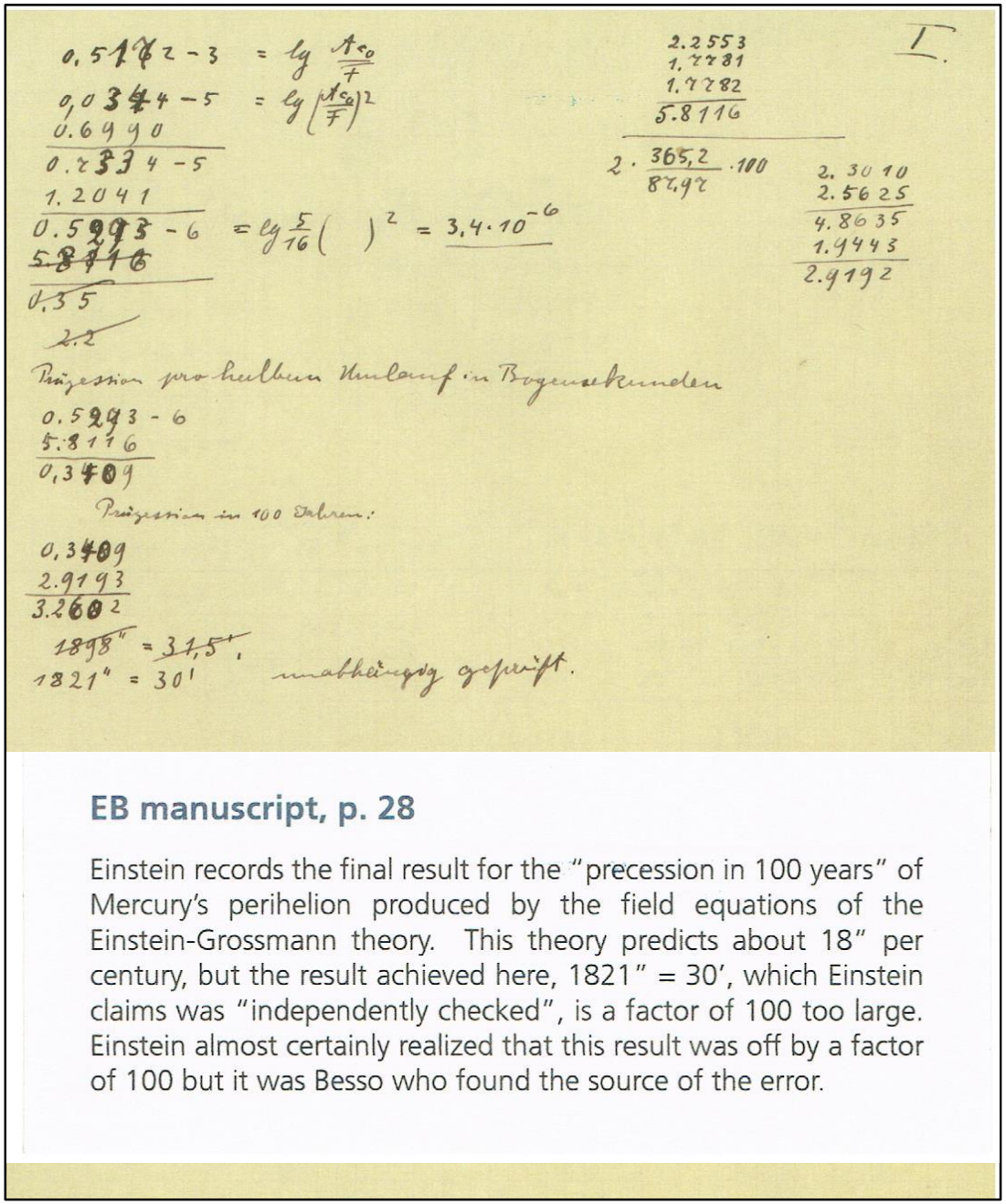
The best that can be done!?

“The fact that the gravitational equations are not generally covariant, which still bothered me so much some time ago, has proved to be unavoidable; it can easily be proved that a theory with generally covariant equations cannot exist if it is required that the field be mathematically completely determined by the matter.”
Einstein to Ludwig Hopf, 2 Nov. 1913

“Now I am completely satisfied and no longer doubt the correctness of the whole system, whether the observation of the solar eclipse succeeds or not. The sense of the matter is too evident.”
Einstein to Michele Besso, 10 March 1914

Einstein – Besso Manuscript

Calculation of the Mercury perihelion precession



EB manuscript, p. 28

Einstein records the final result for the "precession in 100 years" of Mercury's perihelion produced by the field equations of the Einstein-Grossmann theory. This theory predicts about 18" per century, but the result achieved here, 1821" = 30', which Einstein claims was "independently checked", is a factor of 100 too large. Einstein almost certainly realized that this result was off by a factor of 100 but it was Besso who found the source of the error.

The Drama of November (1915) – four papers submitted to the Royal Prussian Academy of Science

"*On the General Theory of Relativity*", Nov. 4th

"…fatal prejudice", "…key to the solution"

"On the General Theory of Relativity (Addendum)", Nov. 11th

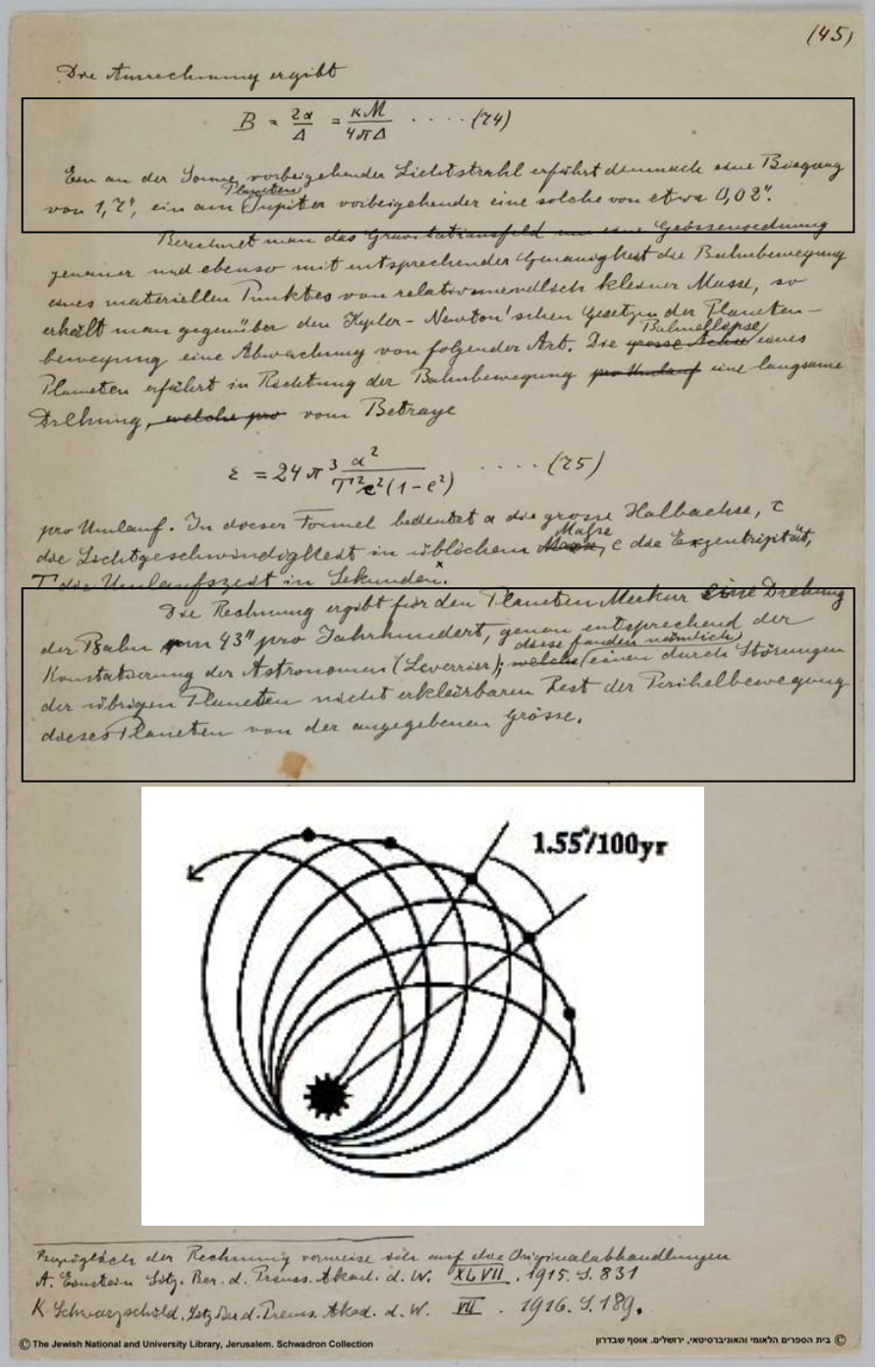
"…an even more concise and logical structure"

"*Explanation of Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity*", Nov. 18th

"…an important confirmation of this most fundamental theory.."

"The Field Equations of Gravitation", Nov. 25th

"…finally completed the general theory of relativity as a logical structure."


(45)

Die Rechnung ergibt

$$B = \frac{2\alpha}{A} = \frac{\kappa M}{4\pi\Delta} \quad \ldots (74)$$

Ein an der Sonne vorbeigehender Lichtstrahl erfährt demnach eine Beugung von 1,7", ein am Planeten Jupiter vorbeigehender eine solche von etwa 0,02".

Berechnet man das Gravitationsfeld nun eine Grössenordnung genauer und ebenso mit entsprechender Genauigkeit die Bahnbewegung eines materiellen Punktes von relativ unendlich kleiner Masse, so erhält man gegenüber den Kepler-Newton'schen Gesetzen der Planetenbewegung eine Abweichung von folgender Art. Die grosse Achse (Balmellipse) eines Planeten erfährt in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung, welche pro von Betrage

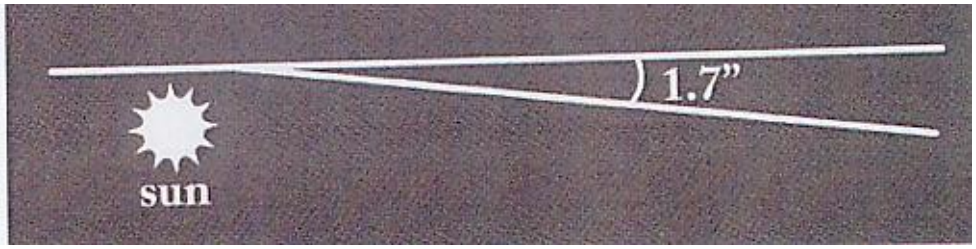
$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1-e^2)} \quad \ldots (75)$$

pro Umlauf. In dieser Formel bedeutet a die grosse Halbachse, c die Lichtgeschwindigkeit im (Maßre) Vakuum, e die Exzentrizität, T die Umlaufszeit in Sekunden.

Die Rechnung ergibt für den Planeten Merkur eine Drehung der Bahn von 43" pro Jahrhundert, genau entsprechend der (diese fanden nämlich) Konstatierung der Astronomen (Leverrier); welche einen durch Störungen der übrigen Planeten nicht erklärbaren Rest der Perihelbewegung dieses Planeten von der angegebenen Grösse.

Bezüglich der Rechnung verweise ich auf die Originalabhandlungen
A. Einstein Sitz. Ber. d. Preuss. Akad. d. W. XLVII. 1915. S. 831
K. Schwarzschild, Sitz. Ber. d. Preuss. Akad. d. W. VII. 1916. S. 189.

According to this, a ray of light going past the sun undergoes a deflection of 1.7"…



Calculation gives for the planet Mercury a rotation of the orbit of 43'' per century, corresponding exactly to astronomical observations (Leverrier); for astronomers have discovered in the motion of perihelion of this planet, after allowing for disturbances by other planets, an inexplicable remainder of this magnitude.

When Einstein saw this result, he was so excited that, as he told one of his former collaborators, he had heart palpitations.

B^{ν}_{σ} durch den aus der Umkehrung der Gleichung (5a) folgenden Ausdruck $\sum_{\sigma} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} B^{\sigma'}$, so erhält man

$$\sum_{\sigma} B^{\sigma'} \sum_{\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu = \sum_{\sigma} B^{\sigma'} A'_\sigma .$$

Hieraus folgt aber, weil in dieser Gleichung die $B^{\sigma'}$ unabhängig voneinander frei wählbar sind, das Transformationsgesetz

$$A'_\sigma = \sum_{\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\sigma} A_\nu \quad \ldots\ldots (7).$$

Bemerkung zur Vereinfachung der Schreibweise der Ausdrücke. Ein Blick auf die Gleichungen dieses § zeigt, dass über Indizes, die zweimal unter einem Summenzeichen auftreten (z. B. der Index ν in (5)) stets summiert wird, und zwar nur über zweimal auftretende Indizes. Es ist deshalb möglich, ohne die Klarheit zu beeinträchtigen, die Summenzeichen wegzulassen. Dafür führen wir die Vorschrift ein: Tritt ein Index in einem Term eines Ausdruckes zweimal auf, so ist über ihn stets zu summieren, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist.

Der Unterschied zwischen dem kovarianten und kontravarianten Vierervektor liegt in dem Transformationsgesetz ((7) bezw. (5)). Beide Gebilde sind Tensoren im Sinne der obigen allgemeinen Bemerkung; ihnen kommt ihre Bedeutung, ihr Charakter durch oberen, der kovariante durch unteren Index bezeichnet.

§ 6. Tensoren zweiten und höheren Ranges.

Kontravarianter Tensor. Bilden wir sämtliche 16 Produkte $A^{\mu\nu}$ der Komponenten A^μ und B^ν zweier kontravarianten Vierervektoren,

$$A^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu \quad \ldots\ldots (8)$$

so erfüllt $A^{\mu\nu}$ gemäss (8) und (5a) das Transformationsgesetz

$$A^{\sigma\tau'} = \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\tau}{\partial x_\nu} A^{\mu\nu} \quad \ldots\ldots (9)$$

(Funktionaldeterminante)

Wir nennen ein Ding, das bezüglich eines jeden Bezugssystems durch 16 Grössen beschrieben wird, die das Transformationsgesetz (9) erfüllen, einen kontravarianten Tensor zweiten Ranges. Nicht jeder Tensor lässt sich gemäss (8) aus zwei Vierervektoren bilden. Aber es ist leicht zu beweisen, dass sich 16 beliebig gegebene $A^{\mu\nu}$ darstellen lassen als die Summe der $A^\mu B^\nu$ von vier geeignet gewählten Paaren von Vierervektoren. Deshalb können fast alle Sätze, die für den durch (9) definierten Tensor zweiten Ranges gelten, am einfachsten dadurch bewiesen werden, dass man sie für spezielle Tensoren vom Typus (8) darthut.

Kontravarianter Tensor beliebigen Ranges. Es ist klar, dass man entsprechend (8) und (9) auch kontravariante Tensoren dritten und höheren Ranges definieren kann mit 4^3 etc. Komponenten. Ebenso erhellt aus (8) und (9), dass man in diesem Sinne den kontravarianten Vierervektor als kontravarianten Tensor ersten Ranges auffassen kann.

Kovarianter Tensor. Bildet man andererseits die 16 Produkte $A_{\mu\nu}$ der Komponenten zweier kovarianter Vierervektoren A_μ und B_ν

$$A_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu , \quad \ldots\ldots (10)$$

Also ist

$$1 = g_{44}\, dx_4^2,$$

$$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1+(g_{44}-1)}} = 1 - \frac{g_{44}-1}{2}$$

oder

$$dx_4 = 1 + \frac{\kappa}{8\pi}\int \frac{\varrho\, dv}{r} \quad \ldots\ldots (12)$$

Die Uhr läuft also langsamer, wenn sie ~~sind~~ in der Nähe grandoraubler Massen aufgestellt ist. Es folgt daraus, dass ~~von der Oberfläche~~ der Spektrallinien von der Oberfläche grosser Sterne zu uns gelangenden Lichtes nach dem roten Spektralende verschoben erscheinen müssen.

Wir untersuchen ferner den Gang der Lichtstrahlen im statischen Gravitationsfeld. Gemäss der speziellen Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit durch die Gleichung

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0$$

gegeben, also gemäss der allgemeinen Relativitätstheorie durch die Gleichung

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = 0 \quad \ldots\ldots (23)$$

Ist die Richtung, d. h. das Verhältnis $dx_1 : dx_2 : dx_3$ gegeben, so liefert die Gleichung (23) die Grössen $\frac{dx_1}{dx_4}, \frac{dx_2}{dx_4}, \frac{dx_3}{dx_4}$, und somit die Geschwindigkeit $\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = \gamma$, im Sinne der Euklidischen Geometrie definiert. Man erkennt leicht, dass die Lichtstrahlen gekrümmt verlaufen müssen mit Bezug auf das Koordinatensystem, falls die $g_{\mu\nu}$ nicht konstant sind. Ist n eine Richtung senkrecht zur Lichtfortpflanzung, so ergibt das Huygens'sche Prinzip, dass der Lichtstrahl (in der Ebene (γ, n) betrachtet) die Krümmung $-\frac{\partial \gamma}{\partial n}$ besitzt.

Wir untersuchen die Krümmung, welche ein Lichtstrahl erleidet, welcher am Lichtstrahl erleidet, der im Abstand Δ an einer Masse M vorbeigeht. Wählt man das Koordinatensystem gemäss der nebenstehenden Skizze, so ist die gesamte Biegung B des Lichtstrahles (positiv gerechnet, wenn sie nach dem Ursprung hin konkav ist) in genügender Näherung gegeben durch

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}\, dx_2,$$

während (73) und (20) ergeben

$$\gamma = \sqrt{\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 + \frac{\kappa}{2r}\left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right)$$

Fuyst

Für das Bestehen eines derartigen Effektes sprechen nach E. Freundlich spektrale Beobachtungen an fixsternen bestimmter Typen. Eine endgültige Prüfung dieser Konsequenz steht indes noch aus.

lassen sich alle Bildungsgesetze von Tensoren auf (22) in Verbindung mit Multiplikationen auffassen.

§11. Einige Spezialfälle von besonderer Bedeutung.

Einige den Fundamentaltensor betreffende Differentialsätze. Wir leiten zunächst einige im folgenden viel gebrauchte Hilfsgleichungen ab. Nach der Regel von der Differentiation der Determinanten ist

$$dg = g^{\mu\nu} g\, dg_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} g\, dg^{\mu\nu}. \quad \cdots (28)$$

Die letzte Gleichung folgt rechtfertigt sich durch die vorletzte, wenn man bedenkt, dass $g_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} = \delta_\mu^\alpha$, dass also $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4$, folglich

$$g_{\mu\nu}\, dg^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} dg_{\mu\nu} = 0.$$

Aus (28) folgt

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial x_\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}. \quad \cdots (29)$$

Aus

$$g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma} = \delta_\nu^\mu$$

folgt ferner durch Differentiation

$$g_{\nu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\tau} = -g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\tau} \quad \cdots (30)$$

$$\left.\begin{aligned} g_{\mu\sigma}\, dg^{\nu\sigma} &= -g^{\nu\sigma}\, dg_{\mu\sigma} \\ \text{bzw.} \quad g_{\mu\sigma} \frac{\partial g^{\nu\sigma}}{\partial x_\tau} &= -g^{\nu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\tau} \end{aligned}\right\} (30)$$

Durch gemischte Multiplikation mit $g^{\sigma\tau}$ bzw. $g_{\nu\tau}$ erhält man hieraus (bei geänderter Reihenfolge der Indizes)

$$\left.\begin{aligned} dg^{\mu\nu} &= -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\, dg_{\alpha\beta} \\ \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \end{aligned}\right\} (31)$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} dg_{\mu\nu} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}\, dg^{\alpha\beta} \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} &= -g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} \end{aligned}\right\} \cdots (32)$$

Die Beziehung (31) erlaubt eine Umformung, von der wir ebenfalls öfter Gebrauch zu machen haben. Gemäss ( ) ist

~~(23a)~~

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma} = \left[\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\ \sigma\right] + \left[\begin{matrix}\beta\\ \alpha\end{matrix}\ \sigma\right] \quad \cdots (33)$$

Setzt man dies in die zweite der Formeln 31 ein, so erhält man mit Rücksicht auf ( )

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} = -\left(g^{\mu\tau} \left\{\begin{matrix}\tau\sigma\\ \nu\end{matrix}\right\} + g^{\nu\tau} \left\{\begin{matrix}\tau\sigma\\ \mu\end{matrix}\right\}\right) \quad \cdots (34)$$

zum Beweis [illegible] (34) [illegible] ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x_\sigma} = \left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \mu\end{matrix}\right\} \quad \cdots (29a)$$

dass sie zur Folge haben, dass für die Komponenten der Totalenergie Erhaltungsgleichungen (des Impulses und der Energie) gelten, welche den Gleichungen (19) und (19a) genau entsprechen. Dies soll im Folgenden dargethan werden.

§17. Die Erhaltungssätze im allgemeinen Falle.

Wir bilden an Gleichung (52) zunächst die Verjüngung nach den [illegible] (51)

Die Gleichung (52) ist leicht so umzuformen, dass auf der rechten Seite das zweite Glied wegfällt. Man verjüngt (52) nach den Indizes μ und σ und subtrahiert sie sodann, mit $\frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma$ multiplizierte Gleichung von (52). Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma g^{\lambda\beta} \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}\right) = -\kappa\left(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma\right) \cdots (52a)$$

An dieser Gleichung bilden wir die Operation $\frac{\partial}{\partial x_\sigma}$. Es ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left[g^{\sigma\beta} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\lambda}\right)\right]$$

Das erste und das dritte Glied der runden Klammer liefern Beiträge, die einander wegheben, wie man erkennt, wenn man im Beitrage des dritten Gliedes die Summationsindizes α und σ einerseits, β und λ andererseits vertauscht. Das zweite Glied lässt sich nach (31) umformen, sodass man erhält

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu} \quad \cdots (54)$$

Das zweite Glied der linken Seite von (52a) liefert zunächst

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left(g^{\lambda\beta} \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}\right)$$

oder

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\mu}\left[g^{\lambda\beta} g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x_\delta}\right)\right]$$

Das vom letzten Glied der runden Klammer herrührende Glied verschwindet wegen (54) bei der von uns getroffenen Koordinatenwahl. Die beiden anderen lassen sich zusammenfassen und liefern wegen (31) zusammen

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\mu},$$

sodass mit Rücksicht auf (54) die Identität

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\sigma}\left(g^{\sigma\beta} \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\sigma g^{\lambda\beta} \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha}\right) \equiv 0 \quad \cdots (55)$$

besteht. Man erhält deshalb

$$\frac{\partial\left(t_\mu^\sigma + T_\mu^\sigma\right)}{\partial x_\sigma} = 0 \quad \cdots 56.$$

(Schlussbemerkung zum Abschnitt D)

Wir haben nun die allgemeinsten Gesetze abgeleitet, welchen das Gravitationsfeld und die Materie genügen, indem wir uns Koincident eines Koordinatensystems bedienten, für welches $\sqrt{-g} = 1$ wird. Wir erzielten dadurch eine erhebliche Vereinfachung der Formeln und Rechnungen, ohne dass wir auf die Forderung des allgemeinen Kovarianz verzichtet hätten. Denn wir fanden unsere Gleichungen durch Spezialisierung (des Koordinatensystems aus) allgemeinen kovarianten Gleichungen.

Immerhin ist die Frage nicht ohne formales Interesse, ob bei entsprechender (verallgemeinerter) Definition der Energiekomponenten des Gravitationsfeldes und der Materie auch ohne Spezialisierung des Koordinatensystems Erhaltungssätze von der Gestalt der Gleichung (36) sowie Feldgleichungen der Gravitation von der Art der Gleichungen (52) (bzw. (52a)) gelten, derart, dass links eine Divergenz (im gewöhnlichen Sinne), rechts die Summe der Energiekomponenten der Materie und der Gravitation steht. Ich habe gefunden, dass dies in der That der Fall ist. Doch glaube ich, dass sich eine Mitteilung meiner ziemlich umfangreichen Betrachtungen über diesen Gegenstand nicht lohnen würde, da doch etwas sachlich Neues dabei nicht herauskommt

Anhang: Darstellung der Theorie ausgehend vom zweiten Variationsprinzip. A. Einstein. (11)

§1. Die Feldgleichungen der Gravitation und der Materie.

Wir setzen voraus, dass sich die Feldgleichungen der Gravitation und die aller anderen Vorgänge lassen sich mit Hilfe aus einem allgemeinen Variationssatze nach von Hamilton'scher Form ableiten

$$\delta \int\int \mathfrak{H}_g \, d\tau = 0 \quad \cdots \quad (26)$$

(wenn wobei $d\tau = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ gesetzt ist.)

ableiten. $\mathfrak{H}_g$ sei dabei eine Funktion der $g^{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}_\alpha \left(= \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)$ und ferner gewisser Funktionen $\chi_{(\kappa)}$ und ihrer Ableitungen nach den x_ν, welche die materiellen Vorgänge im weitesten Sinne beschreiben. Unter diesen verstehen wir alle Vorgänge exklusive derjenigen, welche das Gravitationsfeld betreffen, also ausser den Bewegungen und Zustandsänderungen der Materie im engeren Sinne auch die elektromagnetischen Vorgänge im Vakuum. Bei der Variation sollen die $g^{\mu\nu}$ und $\chi_{(\kappa)}$ miteinander variiert werden, wobei die $\delta g^{\mu\nu}$, $\delta \chi_{(\kappa)}$ (und ihre gewisse Ableitungen die $\delta \chi_{(\kappa)}$) an den Integrationsgrenzen verschwinden sollen.

Der Index Durch das Einklammern des Index κ bei $\chi_{(\kappa)}$ soll angedeutet werden, dass die Stellung dieses Index über den Transformationscharakter und die Anzahl der zur Beschreibung der „Materie" zu verwendenden Funktionen nichts aussagen soll. Diese Unbestimmtheit der Darstellung erscheint mir vorläufig nötig, da über die theoretische Darstellung der Materie noch nicht mehr wissen, als die von Hilbert im Anschluss an die empfohlene Bestimmung des $\mathfrak{H}$ bzgl. über die allgemeine Existenz über die Superpermeabilität der Gravitationsfelder und die die Materie bildenden Felder zu entsprechen, nehmen wir ferner an, dass $\mathfrak{H}$ sich als Summe in der Form

$$\mathfrak{H}_g = \mathfrak{H}_g^{(g)} + \mathfrak{H}_g^{(m)} \qquad \mathfrak{H}_g = \mathfrak{G} + \mathfrak{M} \quad \cdots \quad (27)$$

darstellen lasse, derart, dass $\mathfrak{G}$ nur von den $g^{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}_\alpha$, $\mathfrak{M}$ nur von den $g^{\mu\nu}$, $\chi_{(\kappa)}$ und den Ableitungen $\chi^\alpha_{(\kappa)} = \frac{\partial \chi_{(\kappa)}}{\partial x_\alpha}$ etc. abhänge. Man erhält dann aus (27) durch Variieren nach den $g^{\mu\nu}$ die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\nu}_\alpha}\right) - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad \cdots \quad (28)$$

durch Variieren nach den $\chi_{(\kappa)}$ die Gleichungen

x Die von Hilbert im Anschluss an Mie eingeführte Voraussetzung, dass sich die Materie als ein Vektor und dessen erste Ableitungen darstellen lasse, halte ich für wenig aussichtsvoll.

The Hamiltonian Principle and General Relativity
Oct. 1916

"H. A. Lorentz and D. Hilbert have recently succeeded in presenting the theory of general relativity in a particularly comprehensive form by deriving its equations from a single variational principle. The same shall be done in this paper. My aim here is to present the fundamental connections as transparently and comprehensively as the principle of general relativity allows. In contrast to Hilbert's presentation, I shall make as few assumptions about the constitution of matter as possible. On the other hand, and in contrast to my own very recent treatment of the subject matter, the choice of coordinates shall be made completely free."

“Only too well do I understand your attempt to derive gravitation from the field equations in the manner of Hamilton’s principle. I myself am compelled to derive the Hamiltonian function retroactively, in order to derive the expression for the conservation laws conveniently…Nevertheless, I must admit that I actually do not see in Hamilt. Princip. anything more than a means toward reducing a system of tensor equations to a scalar equation for which the conservation laws are always satisfied and easily derived.”

Einstein to Lorentz, Jan. 1916

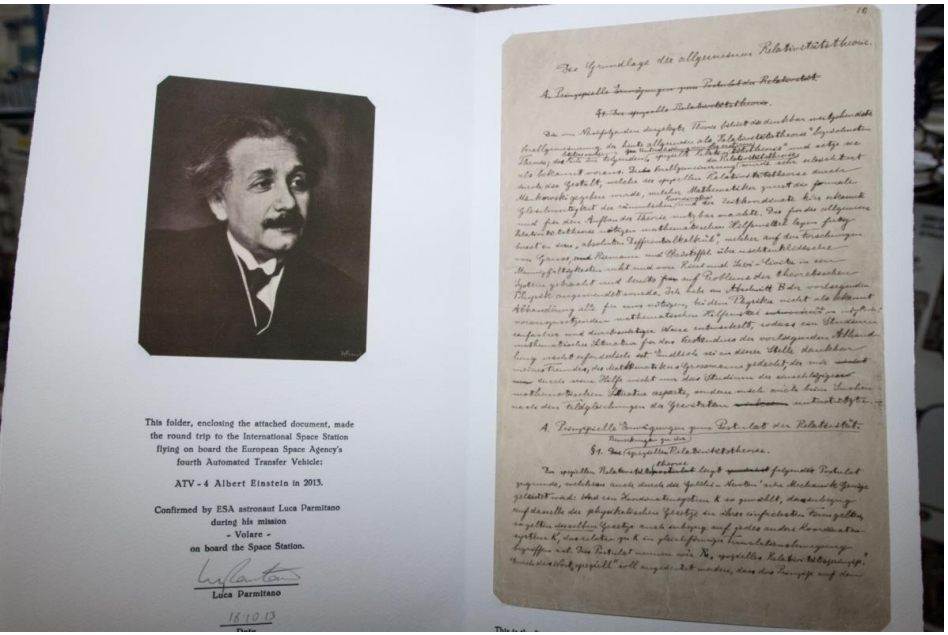
“Hilbert’s assumption about matter appears childish to me in the sense of a child who does not know. At all events, mixing the solid considerations originating from the relativity postulate with such bold unfounded hypotheses about the structure of the electron or matter cannot be sanctioned. I gladly admit that the search for a suitable hypothesis, or for the Hamilton function for the structural makeup of the electron, is one of the most important tasks of theory today. The ‘axiomatic method’ can be of little use here, though.”

Einstein to Hermann Weyl

NASA Spacestation

Luca Parmitano
18. 10. 2013

Albert atv4 Einstein
esa



First page of the manuscript of Einstein's Masterpiece –

"The Foundation of General Relativity"

March, 1916

The Mission of Our University

Published by Einstein in the Academic and Jewish Press on the occasion of the Opening of the Hebrew University

1. 4. 1925